თ.დ.ბაგისინია

სინგულარული ინტეგრალები და ორმაგი მწკრივების შეჯამებადობა რისის მ ე თ ო დ ი თ

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად.

შესრულებულია [redacted].
სუხუმის სახელმწიფო პედაგოგიურ ინსტიტუტში პროფ.ვ.გ.ჭელიძის ხელმძღვანელობით.

ქ.სუხუმი - 1952 წელი.

შესავალი

ორმაგ მწკრივთა თეორიაში შეჯამებადობის საკითხს ცენტრალური ადგილი უჭირავს. ამ საკითხისადმი მიძღვნილია ბევრი შრომები. ცნობილია, რომ კრებადი მარტივი მწკრივი შეჯამებადია ჩეზაროს მეთოდებით, მაგრამ ორმაგი მწკრივებისათვის საზოგადოდ ეს ასე არ არის, მაგალითად, შეიძლება აგება ისეთი კრებადი ორმაგი მწკრივისა, რომელიც შეჯამებადი არ იქნება არც ჩეზაროს და არც აბელის მეთოდით /3/. ასევე თეორემები, რომლებიც სამართლიანია მარტივი მწკრივებისათვის, საზოგადოდ არ არის სამართლიანი ორმაგი მწკრივებისათვის. ორმაგ მწკრივთა თეორიაში საინტერესო შედეგები მიღებული აქვთ საბჭოთა მეცნიერებს: ვ.გ.ჭელიძეს, მ.ფ. ტიმანს, ი.ე.ჟაკსა და სხვებს.

1876 წელს რეიმონდმა / P. Du Bois Reymond / /1/ ააგო ისეთი უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია მოცემულ წერტილში. შემდეგში, 1911 წელს ლებეგის / Lebesgue / /1/, ფეიერისა / Fejer / /1/ და სხვების მიერ აგებული იქნა ასეთივე ტიპის სხვა უწყვეტი ფუნქციები. უფრო გვიან, 1926 წელს, კოლმოგოროვმა /1/ ააგო ჯამებადი ფუნქციის ისეთი მაგალითი, რომლის ფურიეს მწკრივი ყველგან განშლადია.

ამრიგად, არსებობს ისეთი ფუნქციები, რომელთა ფურიეს მწკრივები ყველგან განშლადია. ამიტომ დაისვა საკითხი ფურიეს მწკრივთა კრებადობის ცნების განზოგადების შესახებ ისე, რომ მოცემული განშლადი მწკრივი აღმოჩნდეს კრებადი

ი.პ.ნატანსონმა მოგვცა აუცილებელი და საკმარისი პირობა ერთცვლადის შემოსაზღვრული ფუნქციის სინგულარული ინტეგრალით წარმოდგენისათვის აპროქსიმაციულად უწყვეტობის წერტილებში.

დ.კ.ფადეევმა მოძებნა აუცილებელი და საკმარისი პირობები ჯამებადი ფუნქციის ლებეგის წერტილებში სინგულარული ინტეგრალით წარმოდგენისათვის.

ვ.გ.ჭელიძემ /4/ მოგვცა აუცილებელი და საკმარისი პირობა ორი ცვლადის შემოსაზღვრული ფუნქციების აპროქსიმაციულად უწყვეტობის წერტილებში სინგულარული ორჯერადი ინტეგრალებით წარმოდგენისათვის.

წინამდებარე ნაშრომი შედგება სამი თავისაგან. პირველ თავში შესწავლილია სინგულარული ორმაგი ინტეგრალების კრებადობის საკითხი გარკვეული კლასის ფუნქციებისათვის.

მეორე თავი ეხება რიცხვითი ორმაგი მწკრივების შეჯამებადობის საკითხს რისის საშუალო არითმეტიკული მეთოდით. გამოყვანილია რისის საშუალო არითმეტიკული მეთოდით შეჯამებადობისათვის საკმარისი პირობები, საიდანაც, როგორც კერძო შემთხვევა, მიღებულია რიცხვითი ორმაგი მწკრივების ჩეზაროს მეთოდით შეჯამებადობისათვის საკმარისი პირობები.

მესამე თავში შესწავლილია ფურიე-ლებეგის ორმაგი მწკრივების შეჯამებადობა რისის მეთოდით. აქ პირველ თავში მიღებული შედეგების საფუძველზე დამტკიცებულია, რომ ფურიე-ლებეგის ორმაგი მწკრივი გარკვეული კლასის ფუნქციებისათვის შეჯამებადია თითქმის ყველგან რისის მეთოდით. და ბოლოს,

თავი I

ორი ცვლადის ფუნქციის წარმოდგენა სინგულარული ორმაგი ინტეგრალებით

§ 1. განმარტებები და ლემები

მოვიყვანოთ ზოგიერთი განმარტება.

განმარტება 1. თუ ჯამებადი $\varphi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)$ $(m, n=1,2\dots)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ოთხგანზომილებიან $(a<x<b; a\le\xi\le b; c<y<b, c\le\eta\le d)$ არეში და აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta \varphi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=1$$

ყოველი α, β, γ და δ -თვის, სადაც $a\le\alpha<x<\beta\le b$, $c\le\gamma<y<\delta\le d$, მაშინ $\varphi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)$ $(m,n=1,2\dots)$ ფუნქციას გული ეწოდება.

განმარტება 2. $R_0=[a,b;c,d]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ორი ცვლადის $g(x,y)$ ფუნქციას ვუწოდებთ ზრდადს R_0-ზე, თუ

$$\Delta(g;x_1,x_2;y_1,y_2)\ge 0$$

სადაც

$$\Delta(g;x_1,x_2;y_1,y_2)=g(x_1,y_1)-g(x_1,y_2)+g(x_2,y_2)-g(x_2,y_1),$$

ხოლო x_1, x_2, y_1 და y_2 რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობებს $x_1<x_2$, $y_1<y_2$, მასთან (x_1,y_1) და (x_2,y_2) წერტილები ეკუთვნიან R_0-ს.

განმარტება 3. R_0 -ზე განსაზღვრული ორი ცვლადის $g(x,y)$ ფუნქციას ვუწოდებთ კლებადს R_0 -ზე, თუ

$$\Delta(g; x_1, x_2; y_1, y_2) \le 0$$

ყოველი x_1, x_2, y_1 და y_2 რიცხვებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ მასთან (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილები ეკუთვნიან R_0 -ს.

განმარტება 4. ვთქვათ, $\Psi(x,y;\xi,\eta)$ და $\varphi(x,y;\xi,\eta)$ ფუნქციები განსაზღვრული არიან $R_0 = [a, b; c, d]$ სეგმენტზე. $\Psi(x,y;\xi,\eta)$ -ს ვუწოდებთ $\varphi(x,y;\xi,\eta)$ -ის კუზიან მაჟორანტს R_0 -ზე, თუ დაცულია შემდეგი პირობები:

1/ $|\Phi(x,y;\xi,\eta)| \le \Psi(x,y;\xi,\eta)$

2/ ფიქსირებული (x,y) წერტილისათვის $\Psi(x,y;\xi,\eta)$ ზრდადია $[a, x; c, y]$ სეგმენტზე და ზრდადია ცალცალკე ξ და η ცვლადების მიმართ; კლებადია $[a, x; y, d]$ სეგმენტზე და, ამას გარდა, ზრდადია ξ -ის მიმართ, ხოლო კლებადია η -ს მიმართ; კლებადია $[x, b; c, y]$ სეგმენტზე და, ამას გარდა, კლებადია ξ -ის მიმართ, ხოლო ზრდადია η -ს მიმართ; ზრდადია $[x, b; y, d]$ სეგმენტზე და კლებადია ცალცალკე ξ და η ცვლადების მიმართ.

განმარტება 5. (x,y) წერტილს ვუწოდოთ $f(x,y)$ ფუნქციის $\mathcal{D}$ – წერტილი, თუ

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{1}{hk} \int_x^{x+h}\int_y^{y+k} [f(\xi,\eta) - f(x,y)]\, d\xi\, d\eta = 0,$$

$$\sup_{\substack{0<h\le b-a \\ c\le y\le d}} \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h}\int_c^y [f(\xi,\eta)-f(x,y)]\,d\xi\,d\eta\right| \le M_1(x,y)<\infty,$$

$$\sup_{\substack{0<k\le d-c \\ a\le x\le b}} \frac{1}{k}\left|\int_a^x\int_y^{y+k} [f(\xi,\eta)-f(x,y)]\,d\xi\,d\eta\right| \le M_2(x,y)<\infty.$$

<u>განმარტება 6.</u> (x,y) წერტილს ვუწოდოთ $f(x,y)$ ფუნქციის L-წერტილი, თუ

$$\lim_{h,k\to 0}\frac{1}{hk}\int_x^{x+h}\int_y^{y+k}|f(\xi,\eta)-f(x,y)|\,d\xi\,d\eta=0 \qquad (1.1)$$

$$\sup_{\substack{0<h\le b-a \\ c\le y\le d}} \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\int_c^y |f(\xi,\eta)-f(x,y)|\,d\xi\,d\eta \le M_1(x,y)<\infty, \qquad (1.2)$$

$$\sup_{\substack{0<k\le d-c \\ a\le y\le b}} \frac{1}{k}\int_a^x\int_y^{y+k} |f(\xi,\eta)-f(x,y)|\,d\xi\,d\eta \le M_2(x,y)<\infty. \qquad (1.3)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ D-წერტილთა სიმრავლე შეიცავს L-წერტილთა სიმრავლეს.

<u>განმარტება 7.</u> R_0 -ზე განსაზღვრულ ზომად $f(x,y)$ ფუნქციას ვუწოდებთ S კლასის ფუნქციას, თუ ფუნქცია $f(x,y)\ln^{+}|f(x,y)|$ ჯამებადია.

<u>თეორემა 1.</u> თუ $f(x,y)$ წარმოადგენს R_0 -ზე განსაზღვრულ S კლასის ფუნქციას, მაშინ R_0 სეგმენტის თითქმის ყველა (x,y) წერტილი $f(x,y)$ ფუნქციის L - წერტილია და, მაშასადამე, D - წერტილიც.

<u>დამტკიცება.</u> ცხადია, რომ

$$\sup_{\substack{0<k\le d-c\\ a\le x\le b}}\left\{\frac{1}{k}\int_0^x\int_y^{y+k}|f(\xi,\eta)-f(x,y)|\,d\xi\,d\eta\right\}\le$$

$$\le\sup_{\substack{0<k\le d-c\\ a\le x\le b}}\frac{1}{k}\int_y^{y+k}\int_0^x|f(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta+(b-a)|f(x,y)|$$

მეორე მხრივ,

$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\int_y^{y+k}\int_0^x|f(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta=\int_0^x|f(\xi,y)|\,d\xi \quad \text{სადაც} \quad a\le x\le b$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d$$

ყოველ ორგანზომილებიან $\tau_{i,k} = [x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერად თითო წერტილი (ξ_i, η_k) და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_k)\, \Delta(g; \tau_{i,k})$$

სადაც

$$\Delta(g; \tau_{i,k}) = g(\xi_{i+1}, \eta_{k+1}) - g(\xi_{i+1}, \eta_k) - g(\xi_i, \eta_{k+1}) + g(\xi_i, \eta_k)$$

თუ σ მიისწრაფვის რაიმე სასრული ზღვარისაკენ, როცა $\alpha \to 0$ სადაც α არის მაქსიმუმი $\tau_{i,k}$ სეგმენტების დიამეტრთა შორის და ეს ზღვარი არ არის დამოკიდებული არც $[a,b]$, $[c,d]$ სეგმენტების დაყოფის წესზე და არც (ξ_i, η_k) წერტილების შერჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის სტილტიესის ინტეგრალი $g(x,y)$ ფუნქციით და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, d_{xy}\, g(x,y)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ, თუ $g(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $f(x,y)$ -ით და არსებობს

$$\int_a^b g(x,c)\,d_x f(x,c)\,, \qquad \int_a^b g(x,d)\,d_x f(x,d)\,,$$

$$\int_c^d g(a,y)\,d_y f(a,y)\,, \qquad \int_c^d g(b,y)\,d_y f(b,y)$$

ინტეგრალები, მაშინ $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $g(x,y)$ ფუნქციით და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,d_{xy} g(x,y) = \int_a^b\int_c^d g(x,y)\,d_{xy} f(x,y) + \int_a^b g(x,c)\,d_x f(x,c) -$$

$$- \int_a^b g(x,d)\,d_x f(x,d) + \int_c^d g(a,y)\,d_y f(a,y) - \int_c^d g(b,y)\,d_y f(b,y) + \Delta(gf;R_0)\,, \qquad (1.4)$$

სადაც

$$\Delta(gf;R_0) = g(a,c)f(a,c) - f(b,c)g(b,c) + g(b,d)f(b,d) - g(a,d)f(a,d).$$

/1.4/ წარმოადგენს ნაწილობით ინტეგრების ფორმულას.

<u>ლ ე მ ა 1. თუ $R_0=[a,b;c,d]$ სეგმენტზე მოცემული ჯამებადი $f(t,\tau)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას</u>

$$\mathcal{M}=\sup_{\substack{0<h\le b-a\\0<k\le d-c}}\left\{\frac{1}{hk}\left|\int_a^{a+h}\int_c^{c+k}f(t,\tau)\,dt\,d\tau\right|\right\}<\infty. \tag{1.5}$$

მაშინ R_0 -ზე ყოველი არაუარყოფითი $g(t,\tau)$ ფუნქციისათვის, რომელიც ზრდადია R_0 -ზე და, ამას გარდა, კლებადია ცალცალკე ცვლადების მიმართ, სამართლიანია უტოლობა

$$\left|\int_a^b\int_c^d f(t,\tau)g(t,\tau)\,dt\,d\tau\right|\le\mathcal{M}\int_a^b\int_c^d g(t,\tau)\,dt\,d\tau. \tag{1.6}$$

დამტკიცება. თუ აღვნიშნავთ

$$F(t,\tau)=\int_a^t\int_c^\tau f(u,v)\,du\,dv,$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^b\int_c^d f(t,\tau)g(t,\tau)\,dt\,d\tau=\int_a^b\int_c^d g(t,\tau)\,d_{t\tau}F(t,\tau).$$

გამოვიყენებთ რა ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას, მივიღებთ:

$$\int_a^b\int_c^d g(t,\tau)\,d_{t\tau}F(t,\tau)=\int_a^b\int_c^d F(t,\tau)\,d_{t\tau}g(t,\tau)-$$

$$-\int_a^b F(t,d)\,d_t g(t,d)-\int_c^d F(b,\tau)\,d_\tau g(b,\tau)+F(b,d)g(b,d). \qquad (1.7)$$

/1.5/-ის ძალით გვაქვს:

$$|F(t,\tau)|\le M(t-a)(\tau-c),$$

ამიტომ

$$\left|\int_a^b\int_c^d F(t,\tau)\,d_{t\tau}g(t,\tau)\right|\le M\int_a^b\int_c^d (t-a)(\tau-c)\,d_{t\tau}g(t,\tau)=$$

$$=M(b-a)(d-c)g(b,d)-M(d-c)\int_a^b g(t,d)\,dt-M(b-a)\int_c^d g(b,\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_a^b\int_c^d g(t,\tau)\,dt\,d\tau. \qquad (1.8)$$

გარდა ამისა,

$$-\int_a^b F(t,d)\,d_t\, g(t,d) \le M(d-c)\int_a^b (t-a)\,d_t[-g(t,d)] =$$

$$= -M(d-c)(b-a)g(b,d) + M(d-c)\int_a^b g(t,d)\,dt, \qquad (1.9)$$

ხოლო

$$-\int_c^d F(b,\tau)\,d_\tau\, g(b,\tau) \le M(b-a)\int_c^d (\tau-c)\,d_\tau[-g(b,\tau)] =$$

$$= M(b-a)(d-c)g(b,d) + M(b-a)\int_c^d g(b,\tau)\,d\tau. \qquad (1.10)$$

შემდეგ,

$$F(b,d)g(b,d) \le M(b-a)(d-c)g(b,d). \qquad (1.11)$$

მაშასადამე, /1.7/ /1.8/ /1.9/ /1.10/ და /1.11/ თანაფარდო-ბებიდან ვღებულობთ, რომ

$$\int_a^b\int_c^d g(t,\tau)\,d_{t\tau} F(t,\tau) \le M\int_a^b\int_c^d g(t,\tau)\,dt\,d\tau.$$

ლემა დამტკიცებულია.

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის ძალით გვექნება

$$\int_a^b\int_c^d g(t,\tau)\,d_{t\tau}F(t,\tau)=\int_a^b\int_c^d F(t,\tau)\,d_{t\tau}g(t,\tau)-$$

$$-\int_a^b F(t,d)\,d_t g(t,d)-\int_c^d F(b,\tau)\,d_\tau g(b,\tau)+F(b,d)g(b,d). \tag{1.14}$$

/1.12/-ის ძალით გვაქვს

$$|F(t,\tau)|\le M^*(\tau-c). \tag{1.15}$$

და გავითვალისწინებთ /1.15/ უტოლობას, მივიღებთ:

$$\left|\int_a^b\int_c^d F(t,\tau)\,d_{t\tau}g(t,\tau)\right|\le M^*\int_a^b\int_c^d(\tau-c)\,d_{t\tau}g(t,\tau)=$$

$$=M^*\int_c^d g(a,\tau)\,d\tau-M^*\int_c^d g(b,\tau)\,d\tau-M^*(d-c)[g(b,d)-g(a,d)]. \tag{1.16}$$

გარდა ამისა,

$$-\int_a^b F(t,d)\,d_t\, g(t,d) \le M^*\int_a^b (\tau-c)\,d_t[-g(t,d)] \le$$

$$\le M^*(d-c)\left[g(a,d)-g(b,d)\right], \qquad (1.17)$$

ხოლო

$$-\int_c^d F(b,\tau)\,d_\tau\, g(b,\tau) \le M^*\int_c^d (\tau-c)\,d_\tau[-g(b,\tau)] =$$

$$= -M^*(d-c)\,g(b,d) + M^*\int_c^d g(b,\tau)\,d\tau. \qquad (1.18)$$

შემდეგ

$$F(b,d)\,g(b,d) \le M^*(d-c)\,g(b,d). \qquad (1.19)$$

/1.14/ /1.16/ /1.17/ /1.18/ და /1.19/ თანაფარდობებიდან ადვილად მიიღება /1.13/ უტოლობა.

ლემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი ლემები:

ლ ე მ ა 6. თუ $R_0=[a,b;c,d]$ სეგმენტზე მოცემული ჯამებადი $f(t,\tau)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს /1.12/ პირობას, მაშინ R_0 -ზე ყოველი არაუარყოფითი $g(t,\tau)$ ფუნქციისათვის, რომელიც ზრდადია R_0 -ზე და,ამას გარდა, ზრდადია ცალ-ცალკე t და τ ცვლადების მიმართაც,სამართლიანია /1.13/ უტოლობა.

ლ ე მ ა 7. თუ $R_0 = [a,b;c,d]$ სეგმენტზე მოცემული ჯამებადი $f(t,\tau)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს /1.12/ პირობას, მაშინ R_0 -ზე ყოველი არაუარყოფითი $g(t,\tau)$ ფუნქციისათვის, რომელიც კლებადია R_0 -ზე და, ამას გარდა, ზრდადია t -ს მიმართ, ხოლო კლებადია τ -ს მიმართ, სამართლიანია /1.13/ უტოლობა.

ლ ე მ ა 8. თუ $R_0 = [a,b;c,d]$ სეგმენტზე მოცემული ჯამებადი $f(t,\tau)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს /1.12/ პირობას, მაშინ R_0 -ზე ყოველი არაუარყოფითი $g(t,\tau)$ ფუნქციისათვის, რომელიც კლებადია R_0 -ზე და, ამას გარდა, კლებადია t -ს მიმართ, ხოლო ზრდადია τ -ს მიმართ სამართლიანია /1.13/ უტოლობა.

ჩვენ შემდეგში დაგვჭირდება ვ.გ.ჭელიძის /4/ შემდეგი თეორემა. ვთქვათ, მოცემულია $R_0 = [a,b;c,d]$ არეში ზომად ფუნქციათა ორმაგი მიმდევრობა $\{\varphi_{m,n}(x,y)\}$ ვიგულისხმოთ, რომ ეს მიმდევრობა თანაბრად შემოსაზღვრულია R_0 -ზე, თუ ყოველი ორგანზომილებიანი $R \subset R_0$ ინტერვალისათვის

$$\lim_{m,n\to\infty} \iint_R \varphi_{m,n}(x,y)\,dx\,dy = 0,$$

მაშინ R_0 -ზე ჯამებადი ყოველი $f(x,y)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,\varphi_{m,n}(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

§ 2. ორი ცვლადის ფუნქციის წარმოდგენა სინგულარული ორჯერადი ინტეგრალით D და L წერტილებში.

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ S კლასის ფუნქციის სინგულარული ორჯერადი ინტეგრალით წარმოდგენის საკითხს.

თეორემა 2. თუ $\Phi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)$ არის დადებითი გული ისეთი, რომ ყოველი ფიქსირებული (x,y) წერტილისათვის აკმაყოფილებს პირობებს:

1/ $\lim\limits_{m,n\to\infty}\int_a^b \Phi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi = 0,$ სადაც $\eta\neq y$

2/ $\lim\limits_{m,n\to\infty}\int_c^d \Phi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\eta = 0,$ სადაც $\xi\neq x$

3/ზრდადია $[a,x;c,y]$ სეგმენტზე და ზრდადია ცალ-ცალკე ξ და η ცვლადების მიმართ; კლებადია $[a,x;y,d]$ სეგმენტზე და, ამას გარდა, ზრდადია ξ -ის მიმართ, ხოლო კლებადია η -ს მიმართ; კლებადია $[x,b;c,y]$-ზე და, ამას გარდა, კლებადია ξ -ს მიმართ, ხოლო ზრდადია η -ს მიმართ; ზრდადია $[x,b;y,d]$ სეგმენტზე და კლებადია ცალ-ცალკე ξ და η ცვლადების მიმართ, მაშინ $R_0=[a,b;c,d]$ -ზე განსაზღვრული S კლასის ყოველი

$$J_1=\left|\int_a^x\int_c^y\left[f(\zeta,\eta)-f(x,y)\right]\varphi_{m,n}(x,y;\zeta,\eta)\,d\zeta d\eta\right|,$$

$$J_2=\left|\int_a^x\int_y^d\left[f(\zeta,\eta)-f(x,y)\right]\varphi_{m,n}(x,y;\zeta,\eta)\,d\zeta d\eta\right|,$$

$$J_3=\left|\int_x^b\int_c^y\left[f(\zeta,\eta)-f(x,y)\right]\varphi_{m,n}(x,y;\zeta,\eta)\,d\zeta d\eta\right|, \qquad (1.21)$$

$$J_4=\left|\int_x^b\int_y^d\left[f(\zeta,\eta)-f(x,y)\right]\varphi_{m,n}(x,y;\zeta,\eta)\,d\zeta d\eta\right|,$$

ჯერ დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{m,n\to\infty} J_4=0.$$

რადგანაც (x,y) არის $f(x,y)$ ფუნქციის D - წერტილი, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ -თვის მოიძებნება ისეთი h_0 და K_0, რომ

$$\frac{1}{hk}\left|\int_x^{x+h}\int_y^{y+k}\left[f(\zeta,\eta)-f(x,y)\right]d\zeta d\eta\right|<\frac{\varepsilon}{8}, \text{ როცა } h<h_0,\ k<k_0 \qquad (1.22)$$

ცხადია, რომ

$$J_4=\left|\int_x^b\int_y^d\left[f(\xi,\eta)-f(x,y)\right]\varphi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right|\le J_4^{(1)}+J_4^{(2)}+J_4^{(3)}+J_4^{(4)},$$

სადაც

$$J_4^{(1)}=\left|\int_x^{x+h}\int_y^{y+k}\left[f(\xi,\eta)-f(x,y)\right]\varphi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right|,$$

$$J_4^{(2)}=\left|\int_{x+h}^{b}\int_y^{y+k}\left[f(\xi,\eta)-f(x,y)\right]\varphi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right|,$$

$$J_4^{(3)}=\left|\int_x^{x+h}\int_{y+k}^{d}\left[f(\xi,\eta)-f(x,y)\right]\varphi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right|, \qquad (1.23)$$

$$J_4^{(4)}=\left|\int_{x+h}^{b}\int_{y+k}^{d}\left[f(\xi,\eta)-f(x,y)\right]\varphi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right|.$$

1-ლი ლემისა და /1.20/ უტოლობის ძალით

$$J_4^{(1)}\le\frac{\varepsilon}{8}\int_a^b\int_c^d\varphi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta<\frac{\varepsilon}{4},$$

როცა $m>\nu_0$, $n>\nu_0$. თუ გამოვიყენებთ მე-5 ლემას მივიღებთ:

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_a^b\int_c^d[f(\xi,\eta)-f(x,y)]\,\varphi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

<u>თეორემა 9. თუ $\varphi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)$ ჩუს ყოველი m და n-თვის აქვს ისეთი კუმიანი მაჟორანტი $\Psi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)$, რომ</u>

$$\int_a^b\int_c^d\Psi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta<K(x,y),$$

<u>სადაც K დამოკიდებულია მხოლოდ x და y-ზე, გარდა ამისა,</u>

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_a^b\Psi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi=0,\ \text{სადაც}\quad \eta\neq y,$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_c^d\Psi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\eta=0,\ \text{სადაც}\quad \xi\neq x,$$

<u>მაშინ $R_0=[a,b;c,d]$-ზე განსაზღვრული S კლასის ყოველი $f(\xi,\eta)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას</u>

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_a^b\int_c^d f(\xi,\eta)\,\Phi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = f(x,y)$$

ყოველ (x,y) წერტილში, რომელიც წარმოადგენს $f(\xi,\eta)$ ფუნქციის L -წერტილს.

დამტკიცება. რადგანაც $\Phi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)$ წარმოადგენს გულს, ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ ტოლობა

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_a^b\int_c^d \left[f(\xi,\eta)-f(x,y)\right]\Phi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\int_a^b\int_c^d \left[f(\xi,\eta)-f(x,y)\right]\Phi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = J_1+J_2+J_3+J_4,$$

სადაც J_1, J_2, J_3 და J_4 განსაზღვრულია /1.21/ ტოლობებით.

ჯერ დავამტკიცოთ ტოლობა

$$\lim_{m,n\to\infty} J_4 = 0.$$

რადგანაც (x,y) არის L -წერტილი, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ -თვის მოიძებნება ისეთი h_0 და k_0 რომ

$$\frac{1}{hk}\int_x^{x+h}\int_y^{y+k}\left|f(\xi,\eta)-f(x,y)\right|d\xi d\eta<\frac{\varepsilon}{4K(x,y)}\,,\quad \text{როცა} \quad h<h_0\,,\ k<k_0 \qquad (1.24)$$

ცხადია, რომ

$$J_4=\left|\int_x^b\int_y^d\left[f(\xi,\eta)-f(x,y)\right]\Phi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta\right|\le J_4^{(1)}+J_4^{(2)}+J_4^{(3)}+J_4^{(4)},$$

სადაც $J_4^{(1)}$, $J_4^{(2)}$, $J_4^{(3)}$ და $J_4^{(4)}$ განსაზღვრულია /1.23/ ტოლობებით.

1-ლი ლემისა და /1.24/ უტოლობის ძალით

$$J_4^{(1)}\le\int_x^{x+h}\int_y^{y+k}\left|f(\xi,\eta)-f(x,y)\right|\Psi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta\le\frac{\varepsilon}{4K(x,y)}\int_a^b\int_c^d\Psi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta<\frac{\varepsilon}{4}.$$

თუ გამოვიყენებთ მე-5 ლემას, გვექნება:

$$J_4^{(2)}\le\int_{x+h}^{b}\int_y^{y+k}\left|f(\xi,\eta)-f(x,y)\right|\Psi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta\le M_2(x,y)\int_c^d\Psi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)d\eta\,.$$

განვიხილოთ ორმაგი რიცხვითი მწკრივი

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} . \qquad (2.1)$$

აღვნიშნოთ

$$S_{m,n}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{i,k} . \qquad (2.2)$$

<u>განმარტება</u> 3. ორმაგი მწკრივი /2.1/ კრებადია და ჯამად S რიცხვი აქვს, თუ

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n}=S ,$$

სადაც $S_{m,n}$ განსაზღვრულია /2.2/ ტოლობით.

<u>განმარტება</u> 4. /2.1/ ორმაგ მწკრივს ეწოდება ჩეზაროს მეთოდით შეჯამებადი, ანუ C_1 – შეჯამებადი S რიცხვისაკენ, თუ

$$\lim_{m,n\to\infty} C_{m,n}=S ,$$

სადაც

$$C_{m,n}=\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} S_{i,k} . \qquad (2.3)$$

<u>განმარტება 5.</u> /2.1/ ორმაგ მწკრივს ეწოდება $C_1^{(\lambda)}$ - შეჯამებადი S რიცხვისაკენ, თუ

$$\lim_{(m,n)_\lambda \to \infty} C_{m,n} = S,$$

სადაც $C_{m,n}$ განსაზღვრულია /2.3/ ტოლობით.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ყოველი ნატურალური m და n რიცხვებისათვის სამართლიანია ტოლობა /აბელის ორმაგი გარდაქმნა/

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} u_{i,k} v_{i,k} = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} U_{i,k}\Delta_{ik}^2 v_{i,k} + \sum_{i=0}^{m-1} U_{i,n}\Delta_{i,0} v_{i,n} + \sum_{k=0}^{n-1} U_{m,k}\Delta_{0,k} v_{m,k} + U_{m,n}\cdot v_{mn},$$

სადაც

$$U_{i,k} = \sum_{p=0}^{i}\sum_{q=0}^{k} u_{p,q}, \qquad \Delta_{ik}^2 v_{i,k} = v_{i,k} - v_{i+1,k} + v_{i+1,k+1} - v_{i,k+1}$$

$$\Delta_{i,0} v_{i,n} = v_{i,n} - v_{i+1,n} \quad \text{და} \quad \Delta_{0,k} v_{m,k} = v_{m,k} - v_{m,k+1}.$$

<u>განმარტება 6.</u> $\{\lambda_m\}$ მიმდევრობას ჩვენ ვუწოდებთ M_τ - მიმდევრობას, თუ დაცულია შემდეგი პირობები:

1/ $\Delta_{ii}^2\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^2$ მუდმივნიშანიანია, როცა $0 \le i \le m-2$,

2/ $\frac{m(\lambda_m-\lambda_{m-1})^2}{\lambda_m^2} = O(1)$,

3/ $\frac{m}{\lambda_m^2} = O(1)$.

ლემა 1. თუ $\{\lambda_m\}_{m=0}^{\infty}$ და $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ ზრდადი მიმდევრობებია ისეთი, რომ $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_m=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\infty$, მაშინ

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\lambda_m^r\mu_n^s}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_{ik}^2(\lambda_m-\lambda_i)^r(\mu_n-\mu_k)^s=1,$$

სადაც r და s რაიმე დადებითი რიცხვებია.

დამტკიცება. ცხადია, რომ

$$\Delta_{ik}^2(\lambda_m-\lambda_i)^r(\mu_n-\mu_k)^s=(\lambda_m-\lambda_i)^r(\mu_n-\mu_k)^s-(\lambda_m-\lambda_{i+1})^r(\mu_n-\mu_k)^s+(\lambda_m-\lambda_{i+1})^r(\mu_n-\mu_{k+1})^s-$$

$$-(\lambda_m-\lambda_i)^r(\mu_n-\mu_{k+1})^s=(\lambda_m-\lambda_i)^r\left[(\mu_n-\mu_k)^s-(\mu_n-\mu_{k+1})^s\right]-(\lambda_m-\lambda_{i+1})^r\left[(\mu_n-\mu_k)^s-(\mu_n-\mu_{k+1})^s\right]=$$

$$=\left[(\lambda_m-\lambda_i)^r-(\lambda_m-\lambda_{i+1})^r\right]\left[(\mu_n-\mu_k)^s-(\mu_n-\mu_{k+1})^s\right]=\Delta_i(\lambda_m-\lambda_i)^r\Delta_k(\mu_n-\mu_k)^s.$$

შემდეგ, გვაქვს

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_{ik}^2(\lambda_m-\lambda_i)^r(\mu_n-\mu_k)^s=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_i(\lambda_m-\lambda_i)^r\Delta_k(\mu_n-\mu_k)^s=$$

$$=\sum_{i=0}^{m-1}\left[(\lambda_m-\lambda_i)^r-(\lambda_m-\lambda_{i+1})^r\right]\sum_{k=0}^{n-1}\left[(\mu_n-\mu_k)^s-(\mu_n-\mu_{k+1})^s\right]=(\lambda_m-\lambda_0)^r(\mu_n-\mu_0)^s.$$

აქედან ვღებულობთ:

$$\frac{1}{\lambda_m^2 \mu_n^s} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_{ik}^2 (\lambda_m - \lambda_i)^2 (\mu_n - \mu_k)^s = \frac{(\lambda_m - \lambda_0)^2 (\mu_n - \mu_0)^s}{\lambda_m^2 \mu_n^s}.$$

რადგანაც

$$\lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{\lambda_m^2 \mu_n^s} (\lambda_m - \lambda_0)^2 (\mu_n - \mu_0)^s = 1,$$

ამიტომ

$$\lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{\lambda_m^2 \mu_n^s} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_{ik}^2 (\lambda_m - \lambda_i)^2 (\mu_n - \mu_k)^s = 1.$$

ლემა დამტკიცებულია.

<u>ლ ე მ ა 2.</u> თუ $\vartheta(x)$ ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია და $\vartheta''(x)$ მუდმივნიშნიანია, მაშინ $\Delta_{ii}^2 \vartheta_i$ და $\vartheta''(x)$ ერთნაირნიშნიანია.

<u>დამტკიცება.</u> საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\Delta_{ii}^2 \vartheta_i = \Delta_i \vartheta_i - \Delta_i \vartheta_{i+1} = -\vartheta'(\theta_i) + \vartheta'(\theta_{i+1}) = (\theta_{i+1} - \theta_i)\, \vartheta''(\theta_i'),$$

სადაც $i < \theta_i < i+1$, $\theta_i < \theta_{i+1}' < \theta_{i+1}$. რადგანაც $\theta_{i+1} - \theta_i > 0$, ამიტომ $\Delta_{ii}^2 \vartheta_i$ და $\vartheta''(\theta_i')$ ერთნაირნიშნიანია. $\vartheta''(x)$-ს მუდმივნიშნიანობის გამო $\vartheta''(\theta_i')$ და $\vartheta''(x)$.

ერთნაირნიშნიანია ყოველი x -თვის, ე.ი. $\Delta_{ii}^2 \lambda_i$ და $\nu''(x)$ ერთნაირნიშნიანია.

ლემა 3. თუ $\{\lambda_i\}$ მიმდევრობა ზრდადია და $\Delta_{ii}^2 \lambda_i \le 0$, მაშინ

$$\Delta_{ii}^2 \left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^r \ge 0, \quad \text{როცა} \quad 0 \le i \le m-2, \quad r \ge 0$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ $\Delta_{ii}^2 \lambda_i^k \le 0$, როცა k მთელი დადებითი რიცხვია.

$$\Delta_{ii}^2 \lambda_i^k = (\lambda_i - \lambda_{i+1})(\lambda_i^{k-1} + \lambda_i^{k-2}\lambda_{i+1} + \dots + \lambda_{i+1}^{k-1}) - (\lambda_{i+1} - \lambda_i)(\lambda_{i+1}^{k-1} + \lambda_{i+1}^{k-2}\lambda_{i+2} + \dots + \lambda_{i+2}^{k-1}) \le 0.$$

ცხადია, რომ

$$\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^r = 1 - r\frac{\lambda_i}{\lambda_m} + \frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^2 - \dots (-1)^k \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^k + \dots \qquad (2.4)$$

აქედან

$$\Delta_{ii}^2 \left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^r = -r\frac{\Delta_{ii}^2 \lambda_i}{\lambda_m} + \frac{r(r-1)}{2!}\frac{\Delta_{ii}^2 \lambda_i^2}{\lambda_m^2} - \dots (-1)^k \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}\frac{\Delta_{ii}^2 \lambda_i^k}{\lambda_m^k} + \dots \qquad (2.4)$$

რადგანაც $\Delta_{ii}^2 \lambda_i^k \le 0$ ყოველი k -თვის, ამიტომ /2.4/ არის კრებადი ნიშანცვლადი მწკრივი. ცნობილია, რომ ასეთ შემთხვევაში მწკრივის ჯამს აქვს პირველი წევრის ნიშანი, ე.ი.

$$\Delta_{ii}^2 \left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^r \ge 0, \quad \text{სადაც} \quad 0 \le i \le m-2, \quad r \ge 0.$$

ლემა დამტკიცებულია.

§ 2. ორმაგი რიცხვითი მწკრივების შეჯამებადობა რისის მეთოდით

ვთქვათ, $\{\lambda_m\}_{m=0}^{\infty}$ და $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ არიან დადებით რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობანი ისეთი, რომ

$$\lim_{m\to\infty}\lambda_m=\infty \quad \text{და} \quad \lim_{n\to\infty}\mu_n=\infty .$$

განმარტება 7. /2.1/ ორმაგ მწკრივს ვუწოდოთ რისის საშუალო არითმეტიკული მეთოდით შეჯამებადი, ანუ $R^{(r,s)}(\lambda,\mu)$ -შეჯამებადი S რიცხვისაკენ, თუ

$$\lim_{m,n\to\infty}\sigma_{m,n}^{(r,s)}=S,$$

სადაც

$$\sigma_{m,n}^{(r,s)}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^{r}\left(1-\frac{\mu_k}{\mu_n}\right)^{s}a_{i,k}, \tag{2.5}$$

ხოლო r და s მოცემული დადებითი რიცხვებია.

განმარტება 8. /2.1/ ორმაგ მწკრივს ვუწოდოთ $R_{\lambda}^{(r,s)}(\lambda,\mu)$ - შეჯამებადი S რიცხვისაკენ, თუ

$$\lim_{(m,n)\xrightarrow[\lambda]{}\infty}\sigma_{m,n}^{(r,s)}=S,$$

სადაც $\sigma_{m,n}^{(r,s)}$ განსაზღვრულია /2.5/ ტოლობით.

თუ /2.5/ ტოლობისადმი გამოვიყენებთ აბელის ორმაგ გარდაქმნას, მაშინ მივიღებთ:

$$\sigma_{m,n}^{(r,s)}=\frac{1}{\lambda_m^{r}\mu_n^{s}}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_{ik}^{2}(\lambda_m-\lambda_i)^{r}(\mu_n-\mu_k)^{s}S_{i,k} \tag{2.6}$$

კერძოდ, თუ $r=s=1$, $\lambda_m=m$ და $\mu_n=n$, მაშინ /2.6/ შემდეგ სახეს მიიღებს:

აღვნიშნოთ $\overline{\lim\limits_{m,n\to\infty}}\, S_{m,n} = \bar{S}$. ცხადია, როცა $\bar{S}=\infty$, მაშინ უტოლობა დაცულია. ამიტომ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\bar{S}\neq\infty$. /2.8/ და /2.9/ ტოლობათა ძალით ყოველი $\varepsilon>0$ -თვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი N_1, რომ

$$\left|\sum_{i=0}^{N}\beta_i(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\right|<\frac{\varepsilon}{12\lambda^* r}\,,\quad \left|\sum_{k=0}^{N}\alpha_k(\mu_{k+1}-\mu_k)\right|\le\frac{\varepsilon}{12\lambda^* s}\,,\ \text{როცა}\quad N>N_1.$$

ცხადია ყოველი $A>\bar{S}$ რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი $N_2>N_1$, რომ

$$S_{i,k}<A\,,\quad\text{როცა}\quad i>N_2\,,\ k>N_2\,.$$

გარდა ამისა /2.10/-ის ძალით შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნომერი N_3, რომ

$$\lambda_i\left[\alpha_k-\frac{\varepsilon}{12\lambda^* s(\mu_{N_2+1}-\mu_0)}\right]\le S_{i,k}\le\lambda_i\left[\alpha_k+\frac{\varepsilon}{12\lambda^* s(\mu_{N_2+1}-\mu_0)}\right],\ \text{როცა}\quad i>N_3\,,\ 0\le k\le N_2\,.$$

$$\mu_k\left[\beta_i-\frac{\varepsilon}{12\lambda^* r(\lambda_{N_2+1}-\lambda_0)}\right]\le S_{i,k}\le\mu_k\left[\beta_i+\frac{\varepsilon}{12\lambda^* r(\lambda_{N_2+1}-\lambda_0)}\right],\ \text{როცა}\quad k>N_3\,,\ 0\le i\le N_2\,.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\frac{\Delta_i(\lambda_m-\lambda_i)^r}{\lambda_m^{r-1}}=r(\lambda_{i+1}-\lambda_i)+r_m\,,\qquad \frac{\Delta_k(\mu_n-\mu_k)^s}{\mu_n^{s-1}}=s(\mu_{k+1}-\mu_k)+t_n\,,$$

სადაც

$$\lim_{m\to\infty} r_m=0\,,\qquad \lim_{n\to\infty} t_n=0\,.$$

ცხადია, რომ

$$\sigma_{m,n}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4+\sigma_5\,,$$

სადაც

$$= \frac{\varepsilon}{12} + \lambda^* \tau \left| \sum_{i=0}^{\nu_2} \beta_i (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \right| + \tau_m \lambda^* \left| \sum_{i=0}^{\nu_2} \left[\beta_i + \frac{\varepsilon}{12 \lambda^* \tau (\lambda_{\nu_2+1} - \lambda_0)} \right] \right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{12} + \tau_m \lambda^* \left| \sum_{i=0}^{\nu_2} \left[\beta_i + \frac{\varepsilon}{12 \lambda^* \tau (\lambda_{\nu_2+1} - \lambda_0)} \right] \right|, \text{ როცა } \frac{1}{\lambda} \le \frac{m}{n} \le \lambda .$$

რადგანაც $\lim\limits_{m \to \infty} \tau_m = 0$, ამიტომ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი $\nu_2 > \nu_1$, რომ

$$\tau_m \lambda^* \left| \sum_{i=0}^{\nu_2} \left[\beta_i + \frac{\varepsilon}{12 \lambda^* \tau (\lambda_{\nu_2+1} - \lambda_0)} \right] \right| < \frac{\varepsilon}{12}, \text{ როცა } m > \nu_2 .$$

მაშასადამე,

$$|\sigma_2| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{როცა } m > \nu_2,\ n > \nu_2, \quad \frac{1}{\lambda} \le \frac{m}{n} \le \lambda .$$

ანალოგიურად შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი $\nu_3 > \nu_2$, რომ

$$|\sigma_4| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{როცა } m > \nu_2,\ n > \nu_2 \text{ და } \frac{1}{\lambda} \le \frac{m}{n} \le \lambda .$$

ამგვარად მივიღეთ, რომ

$$\sigma_{m,n}^{(r,s)} \le \varepsilon + \frac{A}{\lambda_m^r \mu_n^s} \sum_{i=\nu_3+1}^{m-1} \sum_{k=\nu_3+1}^{n-1} \Delta_{ik}^2 (\lambda_m - \lambda_i)^r (\mu_n - \mu_k)^s,$$ როცა $m > \nu_3$, $n > \nu_3$ და $\frac{1}{\lambda} \le \frac{m}{n} \le \lambda$.

ε -ის ნებისმიერობისა და 1 ლემის ძალით ვღებულობთ

$$\overline{\lim_{(m,n)_\lambda \to \infty}} \sigma_{m,n}^{(r,s)} \le A.$$

აქედან

$$\overline{\lim_{(m,n)_\lambda \to \infty}} \sigma_{m,n}^{(r,s)} \le \overline{S} = \overline{\lim_{m,n \to \infty}} S_{m,n}. \qquad (2.11).$$

ანალოგიურად მტკიცდება უტოლობა

$$\underline{\lim_{m,n \to \infty}} S_{m,n} \le \underline{\lim_{(m,n)_\lambda \to \infty}} \sigma_{m,n}^{(r,s)}. \qquad (2.12)$$

რადგანაც

$$\underline{\lim_{(m,n)_\lambda \to \infty}} \sigma_{m,n}^{(r,s)} \le \overline{\lim_{(m,n)_\lambda \to \infty}} \sigma_{m,n}^{(r,s)},$$

ამიტომ /1.11/ და /1.12/-დან ვღებულობთ

$$\underline{\lim}_{m,n\to\infty} S_{m,n} \le \underline{\lim}_{(m,n)_\lambda\to\infty} \sigma_{m,n}^{(r,s)} \le \overline{\lim}_{(m,n)_\lambda\to\infty} \sigma_{m,n}^{(r,s)} \le \overline{\lim}_{m,n\to\infty} S_{m,n}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან, როგორც შედეგი, მიიღება შემდეგი

<u>თეორემა 5.</u> თუ /2.1/ ორმაგი მწკრივი კრებადია S რიცხვისაკენ და დაცულია /2.8/ და /2.9/ პირობები, მაშინ

$$\lim_{(m,n)_\lambda\to\infty} \sigma_{m,n}^{(r,s)} = S,$$

სადაც $\sigma_{m,n}^{(r,s)}$ განსაზღვრულია /2.6/ ტოლობით.

თუ $r=s=1$, $\lambda_m=m$ და $\mu_n=n$, მაშინ მე-4 თეორემიდან მიიღება

<u>თეორემა 6.</u> თუ დაცულია პირობები

$$\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k = 0, \tag{2.13}$$

სადაც

$$\alpha_k = \lim_{i\to\infty}\frac{S_{i,k}}{i} < \infty, \qquad \beta_i = \lim_{k\to\infty}\frac{S_{i,k}}{k} < \infty,$$

მაშინ

$$\underline{\lim}_{m,n\to\infty} S_{m,n} \le \underline{\lim}_{(m,n)_\lambda\to\infty} C_{m,n} \le \overline{\lim}_{(m,n)_\lambda\to\infty} C_{m,n} \le \overline{\lim}_{m,n\to\infty} S_{m,n},$$

სადაც $C_{m,n}$ განსაზღვრულია /2.3/ ტოლობით.

მე-6 თეორემიდან, როგორც შედეგი, მიიღება შემდეგი

მაშინ
$$S_{m,n}=\begin{cases}(n+1), \text{ როცა } m=0, & n=0,1,2\ldots\\ -(n+1), \text{ როცა } m=1, & n=0,1,2\ldots\\ 0, \text{ როცა } m\geq 2, & n=0,1,2\ldots\end{cases}$$

ცხადია, რომ $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{m,n}=0$ და /2.15/ დარღვეულია, ამიტომ ვ.ნ.ჭელიძის თეორემით ვერ ვიტყვით, რომ მწკრივი $C_1^{(\lambda)}$ – შეჯამებადია, მაშინ, როდესაც მე-7 თეორემით მწკრივი $C_1^{(\lambda)}$ – შეჯამებადია, რადგანაც დაცულია ამ თეორემის ყველა პირობა.

<u>თეორემა 8.</u> თუ დაცულია /2.7/ პირობა, გარდა ამისა,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i(\lambda_{i+1}-\lambda_i)=0, \tag{2.16}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(\mu_{k+1}-\mu_k)=0, \tag{2.17}$$

სადაც

$$\alpha_k=\lim_{i\to\infty}\frac{\sigma_{i,k}^{(r,s)}}{\lambda_i}<\infty, \qquad \beta_i=\lim_{k\to\infty}\frac{\sigma_{i,k}^{(r,s)}}{\mu_k}<\infty,$$

მაშინ

$$\varliminf_{m,n\to\infty}\sigma_{m,n}^{(r,s)}\leq\varliminf_{(m,n)_\lambda\to\infty}\sigma_{m,n}^{(r+h,s+\delta)}\leq\varlimsup_{(m,n)_\lambda\to\infty}\sigma_{m,n}^{(r+h,s+\delta)}\leq\varlimsup_{m,n\to\infty}\sigma_{m,n}^{(r,s)},$$

სადაც $\sigma_{m,n}^{(r,s)}$ განსაზღვრულია /2.6/ ტოლობით. $h>0,\ \delta>0$.

დამტკიცება. ცხადია,რომ

$$\sigma_{m,n}^{(r+h,s+\delta)}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^{r+h}\left(1-\frac{\mu_k}{\mu_n}\right)^{s+\delta}a_{i,k}=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^{h}\left(1-\frac{\mu_k}{\mu_n}\right)^{\delta}\cdot\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^{r}\left(1-\frac{\mu_k}{\mu_n}\right)^{s}a_{i,k}.$$

აღვნიშნოთ

$$u_{i,k}=\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^{r}\left(1-\frac{\mu_k}{\mu_n}\right)^{s}a_{i,k},\quad v_{i,k}=\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^{h}\left(1-\frac{\mu_k}{\mu_n}\right)^{\delta},$$

მაშინ აბელის ორმაგი გარდაქმნა გვაძლევს:

$$\sigma_{m,n}^{(r+h,s+\delta)}=\frac{1}{\lambda_m^{h}\mu_n^{\delta}}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_{ik}^{2}(\lambda_m-\lambda_i)^{h}(\mu_n-\mu_k)^{\delta}\sigma_{i,k}^{(r,s)}.$$

$\sigma_{i,k}^{(r,s)}$ აკმაყოფილებს მე-4 თეორემის პირობებს,ამიტომ ამ თეორემის ძალით გვაქვს

$$\underline{\lim_{m,n\to\infty}}\,\sigma_{m,n}^{(r,s)}\le\underline{\lim_{(m,n)_\lambda\to\infty}}\,\sigma_{m,n}^{(r+h,s+\delta)}\le\overline{\lim_{(m,n)_\lambda\to\infty}}\,\sigma_{m,n}^{(r+h,s+\delta)}\le\overline{\lim_{m,n\to\infty}}\,\sigma_{m,n}^{(r,s)}.$$

ამ თეორემიდან,როგორც შედეგი,მიიღება შემდეგი

თეორემა 9. თუ $\lim_{m,n\to\infty}\sigma_{m,n}^{(r,s)}=S$ და დაცულია წინა თეორემის პირობები, მაშინ

$$\lim_{(m,n)_\lambda\to\infty}\sigma_{m,n}^{(r+h,s+\delta)}=S,$$

სადაც $\sigma_{m,n}^{(r,s)}$ განსაზღვრულია /2.6/ ტოლობით, $h>0$ და $\delta>0$.

<u>თეორემა 10.</u> თუ $\{\lambda_m\}$ და $\{\mu_n\}$ წარმოადგენენ შესაბამად M_r და M_s მიმდევრობებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ /2.7/ პირობებს, გარდა ამისა,

1/ $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{C_{m,n}}{\lambda_m} = 0$ ყოველი ფიქსირებული n -თვის,

2/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C_{m,n}}{\mu_n} = 0$ ყოველი ფიქსირებული m -თვის,

3/ $\lim\limits_{m,n\to\infty} C_{m,n} = S$,

სადაც $C_{m,n}$ განსაზღვრულია /2.3/ ტოლობით, მაშინ

$$\lim_{(m,n)_\lambda\to\infty} \sigma_{m,n}^{(r,s)} = S,$$

სადაც $\sigma_{m,n}^{(r,s)}$ განსაზღვრულია /2.6/ ტოლობით, ხოლო $r>0$, $s>0$.

<u>დამტკიცება.</u> რადგანაც $\{\lambda_m\}$ და $\{\mu_n\}$ წარმოადგენენ შესაბამად M_r და M_s მიმდევრობებს, ამიტომ

$$\frac{1}{\lambda_m^r}\sum_{i=0}^{m-2}(i+1)\left|\Delta_{ii}^2(\lambda_m-\lambda_i)^r\right| \le \frac{m}{\lambda_m^r}\left[(\lambda_m-\lambda_0)^r-(\lambda_m-\lambda_1)^r-(\lambda_m-\lambda_{m-1})^r\right]=O(1)$$

და

$$\frac{1}{\mu_n^s}\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\left|\Delta_{kk}^2(\mu_n-\mu_k)^s\right| \le \frac{n}{\mu_n^s}\left[(\mu_n-\mu_0)^s-(\mu_n-\mu_1)^s-(\mu_n-\mu_{n-1})^s\right]=O(1),$$

ე.ი. შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი სასრული რიცხვები C და ν_0, რომ

$$\frac{1}{\lambda_m^r}\sum_{i=0}^{m-2}(i+1)\left|\Delta_{ii}^2(\lambda_m-\lambda_i)^r\right| < C, \qquad \text{როცა } m>\nu_0,$$

თავი III.

ფურიე - ლებეგის ორმაგი მწკრივების შეჯამებადობა რისის მეთოდით

§ 1. ფურიე - ლებეგის ორმაგი მწკრივების შესახებ

განვიხილოთ ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქცია $f(x,y)$ ვთქვათ, ეს ფუნქცია პერიოდულია ორივე ცვლადის მიმართ და მისი პერიოდი არის 2π. მაშინ, როგორც ვიცით $f(x,y)$ ფუნქციის ფურიე - ლებეგის ორმაგ მწკრივს შემდეგი სახე აქვს

$$\sigma[f(x,y)] \simeq \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} K_{m,n}\left[a_{m,n}\cos mx \cos nx + b_{m,n}\sin mx \cos ny + \right.$$

$$\left. + c_{m,n}\cos mx \sin ny + d_{m,n}\sin mx \sin ny\right], \qquad (3.1)$$

სადაც

$$K_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{თუ } m=n=0. \\ \frac{1}{2}, & \text{თუ } m=0,\ n>0 \text{ ან } m>0,\ n=0. \\ 1, & \text{თუ } m>0,\ n>0. \end{cases} \qquad (3.2)$$

ცნობილია,რომ

$$S_{m,n}(x,y;f)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{Q} f(\xi,\eta)\,\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(x-\xi)\,\sin\frac{2n+1}{2}(y-\eta)}{\sin\frac{x-\xi}{2}\,\sin\frac{y-\eta}{2}}\,d\xi\,d\eta. \qquad (3.4)$$

ჩვენ არ შევეხებით მწკრივის კრებადობის საკითხს,არამედ დავინტერესდებით მისი შეჯამებადობა რისის მეთოდით.

<u>განმარტება 1.</u> ჩვენ ვიტყვით,რომ $f(x,y)$ ფუნქციის ფურიე-ლებეგის ორმაგი მწკრივი შეჯამებადია რისის მეთოდით (x,y) წერტილზე $f(x,y)$ ფუნქციისაკენ, თუ

$$\lim_{m,n\to\infty}\sigma_{m,n}^{(r,s)}(x,y;f)=f(x,y),$$

სადაც

$$\sigma_{m,n}^{(r,s)}(x,y;f)=\frac{1}{\lambda_m^r\mu_n^s}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_{i,k}^2(\lambda_m-\lambda_i)^r(\mu_n-\mu_k)^s S_{i,k}(x,y;f). \qquad (3.5)$$

თუ (3.5) ფორმულაში შევიტანთ $S_{m,n}(x,y;f)$ -ის მნიშვნელობას და ვაწარმოებთ ელემენტარულ გარდაქმნებს, მივიღებთ:

$$\sigma_{m,n}^{(r,s)}(x,y;f)=\iint\limits_{Q} f(\xi,\eta)R_{m,n}^{(r,s)}(\xi-x,\eta-y)\,d\xi\,d\eta,$$

სადაც

$$R_{m,n}^{(r,s)}(\xi-x,\eta-y)=\frac{1}{4\pi^2\lambda_m^r\mu_n^s}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_{ik}^2(\lambda_m-\lambda_i)^r(\mu_n-\mu_k)^s\,\frac{\sin\frac{2i+1}{2}(\xi-x)\,\sin\frac{2k+1}{2}(\eta-y)}{\sin\frac{\xi-x}{2}\,\sin\frac{\eta-y}{2}}. \qquad (3.6)$$

აღვნიშნოთ

$$U_{i,k}=\frac{\sin\frac{2i+1}{2}(\xi-x)\cdot\sin\frac{2k+1}{2}(\eta-y)}{\sin\frac{\xi-x}{2}\;\sin\frac{\eta-y}{2}}, \qquad v_{i,k}=\Delta_{ik}^2(\lambda_m-\lambda_i)^r(\mu_n-\mu_k)^s$$

და გამოვიყენოთ აბელის ორმაგი გარდაქმნა, მაშინ მივიღებთ:

$$R^{(r,s)}_{m,n}(\zeta-x,\eta-y)=\frac{1}{\lambda_m^r\mu_n^s}\sum_{i=0}^{m-2}\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^4_{iikk}(\lambda_m-\lambda_i)^r(\mu_n-\mu_k)^s(i+1)(k+1)F_i(\zeta-x)F_k(\eta-y)+$$

$$+\frac{n(\mu_n-\mu_{n-1})^s}{\lambda_m^r\mu_n^s}\sum_{i=0}^{m-2}\Delta^2_{ii}(\lambda_m-\lambda_i)^r(i+1)F_i(\zeta-x)F_{n-1}(\eta-y)+$$

$$+\frac{m(\lambda_m-\lambda_{m-1})^s}{\lambda_m^r\mu_n^s}\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2_{kk}(\mu_n-\mu_k)^s(k+1)F_k(\eta-y)F_{m-1}(\zeta-x)+$$

$$+\frac{m\cdot n\,(\lambda_m-\lambda_{m-1})^r(\mu_n-\mu_{n-1})^s}{\lambda_m^r\mu_n^s}F_{m-1}(\zeta-x)\,F_{n-1}(\eta-y)=R^{(r)}_{1,m}(\zeta-x)\cdot R^{(s)}_{2,n}(\eta-y),$$

სადაც

$$R^{(r)}_{1,m}(\zeta-x)=\frac{1}{\lambda_m^r}\sum_{i=0}^{m-2}\Delta^2_{ii}(\lambda_m-\lambda_i)^r(i+1)F_i(\zeta-x)+\frac{m\cdot(\lambda_m-\lambda_{m-1})^r}{\lambda_m^r}F_{m-1}(\zeta-x),$$

$$R^{(s)}_{2,n}(\eta-y)=\frac{1}{\mu_n^s}\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2_{kk}(\mu_n-\mu_k)^s(k+1)F_k(\eta-y)+\frac{n(\mu_n-\mu_{n-1})^s}{\mu_n^s}F_{n-1}(\eta-y),$$

ხოლო $F_i(\zeta-x)$ და $F_k(\eta-y)$ ფეიერის გულებია.

§ 2. $R^{(r,s)}_{m,n}(\zeta-x,\eta-y)$ ფუნქციის ზოგიერთი თვისება

შემდეგში ჩვენ დაგვჭირდება $R^{(r,s)}_{m,n}(\zeta-x,\eta-y)$ ფუნქციის ზოგიერთი თვისება, ამ მოსაზრებით შევუდგეთ მათ შესწავლას.

1° ყოველი m და n-თვის სამართლიანია ტოლობა

$$= \frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2 \lambda_m^r \mu_n^s} (\lambda_m - \lambda_0)^r (\mu_n - \mu_0)^s \le \frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2} = \frac{mn}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = A\,mn,$$

ე.ი.

$$\left| R_{m,n}^{(r,s)}(\xi - x, \eta - y) \right| \le A\,mn.$$

3° თუ $\Delta_{ii}^2 \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^r$ და $\Delta_{kk}^2 \left(1 - \frac{\mu_k}{\mu_n}\right)^s$ მუდმივ-ნიშნიანია, ამას გარდა,

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\Delta \lambda_m}{\lambda_m} = 0 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta \mu_n}{\mu_n} = 0,$$

მაშინ

$$\lim_{m,n \to \infty} \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta R_{m,n}^{(r,s)}(\xi - x, \eta - y)\, d\xi\, d\eta = 1 \qquad (3.8)$$

ყოველ α, β, γ და δ -თვის, სადაც $-\pi \le \alpha < x < \beta \le \pi$; $-\pi \le \gamma < y < \delta \le \pi$.
მაშასადამე, $R_{m,n}^{(r,s)}(\xi - x, \eta - y)$ ფუნქცია წარმოადგენს გულს.

მართლაც, ცხადია, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_{m,n}^{(r,s)}(\xi - x, \eta - y)\, d\xi\, d\eta = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_{1,m}^{(r)}(\xi - x) \cdot R_{2,n}^{(s)}(\eta - y)\, d\xi\, d\eta =$$

$$\int_{-\pi}^{\alpha} R_{1,m}^{(r)}(z-x)\,dz \le \frac{A(x,\alpha)}{\lambda_m^2}\left\{\sum_{i=0}^{m-2}\Delta_{ii}^2(\lambda_m-\lambda_i)^2+(\lambda_m-\lambda_{m-1})^2\right\}=A(x,\alpha)\frac{(\lambda_m-\lambda_0)^2-(\lambda_m-\lambda_1)^2}{\lambda_m^2},$$

ე.ი.

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\alpha} R_{1,m}^{(r)}(z-x)\,dz=0.$$

შემდეგ მსჯელობა მიმდინარეობს ისე, როგორც თვისების მტკიცების დროს.

5.° თუ $\Delta_{ii}^2\lambda_i\le 0$, $\Delta_{kk}^2\mu_k\le 0$ ყოველი i და k-თვის, მაშინ

$$R_{m,n}^{(r,s)}(z-x,\eta-y)\ge 0.$$

მართლაც,

$$R_{m,n}^{(r,s)}(z-x,\eta-y)=\frac{1}{\lambda_m^2\mu_n^s}\sum_{i=0}^{m-2}\sum_{k=0}^{n-2}\Delta_{ii}^2(\lambda_m-\lambda_i)^2\Delta_{kk}^2(\mu_n-\mu_k)^s(i+1)(k+1)F_i(z-x)F_k(\eta-y)+$$

$$+\frac{(\mu_n-\mu_{n-1})^s\cdot n}{\lambda_m^2\mu_n^s}\sum_{i=0}^{m-2}\Delta_{ii}^2(\lambda_m-\lambda_i)^2(i+1)F_i(z-x)F_{n-1}(\eta-y)+$$

$$+\frac{(\lambda_m-\lambda_{m-1})^2\cdot m}{\lambda_m^2\mu_n^s}\sum_{k=0}^{n-2}\Delta_{kk}^2(\mu_n-\mu_k)^s(k+1)F_{m-1}(z-x)F_k(\eta-y)+$$

$$+\frac{(\lambda_m-\lambda_{m-1})^2(\mu_n-\mu_{n-1})^s}{\lambda_m^2\mu_n^s}\cdot m\cdot n\cdot F_{m-1}(z-x)F_{n-1}(\eta-y). \tag{3.10}$$

სადაც $F_i(z-x)$ და $F_k(\eta-y)$ ფეიერის გულებია. რადგანაც $\Delta_{ii}^2\lambda_i\le 0$ და $\Delta_{kk}^2\mu_k\le 0$, ამიტომ II-თავის მე-8 ლემის ძალით, $\Delta_{ii}^2(\lambda_m-\lambda_i)^2\ge 0$ და $\Delta_{kk}^2(\mu_n-\mu_k)^s\ge 0$; გარდა ამისა, $F_i(z-x)\ge 0$ და $F_k(\eta-y)\ge 0$. ასე, რომ (3.10)

გამოსახვაში შემავალი მწკრივთა წევრები დადებითებია, ამიტომ მათი ჯამიც $R^{(r,s)}_{m,n}(\xi-x,\eta-y)\geq 0$.

თეორემა 11. თუ $f(x,y)$ წარმოადგენს ორივე ცვლადის მიმართ პერიოდულ S კლასის ფუნქციას 2π პერიოდით. ამას გარდა, $\Delta^2_{ii}\lambda_i\leq 0$ და $\Delta^2_{kk}\mu_k\leq 0$, მაშინ

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi,\eta)R^{(r,s)}_{m,n}(\xi-x,\eta-y)\,d\xi\,d\eta=f(x,y) \qquad (3.11)$$

ყოველ (x,y) წერტილზე, რომელიც წარმოადგენს $f(x,y)$ ფუნქციის D - წერტილს.

დამტკიცება. რადგანაც $\Delta^2_{ii}\lambda_i\leq 0$ და $\Delta^2_{kk}\mu_k\leq 0$ ამიტომ 4° და 5° თვისებების ძალით $R^{(r,s)}_{m,n}(\xi-x,\eta-y)$ წარმოადგენს დადებით გულ. გარდა ამისა, ის აკმაყოფილებს მე-2 თეორემის ყველა პირობებს, ამიტომ ამ თეორემის ძალით (3.11) ტოლობას ადგილი აქვს ყოველ (x,y) წერტილზე, რომელიც წარმოადგენს $f(x,y)$ ფუნქციის D - წერტილს.

ცნობილია იესენის, მარცინკევიჩის და ზიგმუნდის / Jessen, Marcinkiewicz, Zygmund / [8] შედეგი

თეორემა: თუ $f(x,y)$ ფუნქცია ეკუთვნის S კლასს R არეში, მაშინ თითქმის ყველგან R არეში ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{m,n\to\infty}\sigma_{m,n}(x,y;f)=f(x,y), \qquad (3.12)$$

ყოველ (x,y) წერტილში, რომელიც წარმოადგენს $f(\xi,\eta)$ ფუნქციის L - წერტილს.

დამტკიცება. 3° -ის ძალით $R^{(r,s)}_{m,n}(\xi-x,\eta-y)$ არის ნული. ამას გარდა, ადვილი შესამოწმებელია, რომ ფუნქცია

$$\psi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)=\frac{\pi^2}{\lambda_m^r\mu_n^s}\sum_{i=0}^{m-2}\sum_{k=0}^{n-2}\left|\Delta^4_{iikk}(\lambda_m-\lambda_i)^r(\mu_n-\mu_k)^s\right|\frac{(i+1)^2(k+1)^2}{[(i+1)^2(\xi-x)^2+4][(k+1)^2(\eta-y)^2+4]}+$$

$$+\frac{\pi^2(\lambda_m-\lambda_{m-1})^r}{\lambda_m^r\mu_n^s}\sum_{k=0}^{n-2}\left|\Delta^2_{kk}(\mu_n-\mu_k)^s\right|\frac{(m-1)^2(k+1)^2}{[(m-1)^2(\xi-x)^2+4][(k+1)^2(\eta-y)^2+4]}+$$

$$+\frac{\pi^2(\mu_n-\mu_{n-1})^s}{\lambda_m^r\mu_n^s}\sum_{i=0}^{m-2}\left|\Delta^2_{ii}(\lambda_m-\lambda_i)^r\right|\frac{(i+1)^2(n-1)^2}{[(i+1)^2(\xi-x)^2+4][(n-1)^2(\eta-y)^2+4]}+$$

$$+\frac{\pi^2(\lambda_m-\lambda_{m-1})^r(\mu_n-\mu_{n-1})^s}{\lambda_m^r\mu_n^s}\frac{(m-1)^2(n-1)^2}{[(m-1)^2(\xi-x)^2+4][(n-1)^2(\eta-y)^2+4]}.$$

წარმოადგენს $R^{(r,s)}_{m,n}(\xi-x,\eta-y)$ -ის კერიან მაჟორანტს, თუ $|\xi-x|<\pi$ $|\eta-y|<\pi$. ცხადია, რომ

$$\psi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)=\varphi_{1,m}(x,\xi)\cdot\varphi_{2,n}(y,\eta),$$

სადაც

$$\varphi_{1,m}(x,\xi) = \frac{\pi}{\lambda_m^2}\sum_{i=0}^{m-2} \left|\Delta_{ii}^2(\lambda_m-\lambda_i)^2\right| \frac{(i+1)^2}{[(i+1)^2(\xi-x)^2+4]} + \frac{\pi(\lambda_m-\lambda_{m-1})^2(m-1)^2}{\lambda_m^2[(m-1)^2(\xi-x)^2+4]},$$

$$\varphi_{2,n}(y,\eta) = \frac{\pi}{\mu_n^5}\sum_{k=0}^{n-2} \left|\Delta_{kk}^2(\mu_n-\mu_k)^5\right| \frac{(k+1)^2}{[(k+1)^2(\eta-y)^2+4]} + \frac{\pi(\mu_n-\mu_{n-1})^5(n-1)^2}{\mu_n^5[(n-1)^2(\eta-y)^2+4]}.$$

შემდეგ გვაქვს:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{1,m}(x,\xi)\,d\xi \le \frac{\pi m}{\lambda_m^2}\sum_{i=0}^{m-2}\left|\Delta_{ii}^2(\lambda_m-\lambda_i)^2\right|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(i+1)\,d\xi}{[(i+1)^2(\xi-x)^2+4]} + \frac{\pi(\lambda_m-\lambda_{m-1})^2 m}{\lambda_m^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(m-1)\,d\xi}{[(m-1)^2(\xi-x)^2+4]} \le$$

$$\le \frac{\pi^2 m}{2\lambda_m^2}\left[(\lambda_m-\lambda_0)^2-(\lambda_m-\lambda_1)^2+2(\lambda_m-\lambda_{m-1})^2\right] = O(1).$$

ანალოგიურად მტკიცდება,რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{2,n}(y,\eta)\,d\eta = O(1).$$

მაშასადამე,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{m,n}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = O(1).$$

ადვილი შესამოწმებელია,რომ დაცულია მე-3 თეორემის დანარჩენი პირობებიც,ამიტომ ამ თეორემის ძალით გვაქვს:

ს ა რ ჩ ე ვ ი: